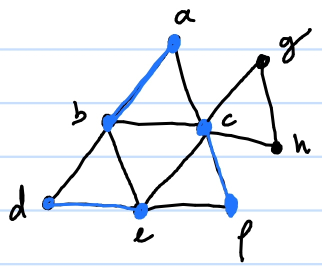
Número Extremal para árvores

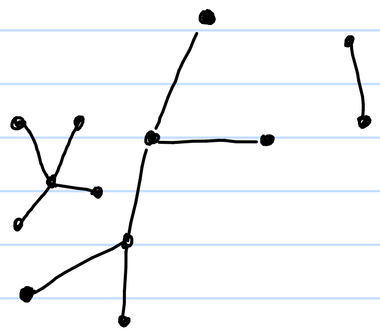
Um <u>emparelhamento</u> em um grafo G é um conj. $M \subseteq E(G)$ tal que, para qualquer par de arestas $e, f \in M$, temos que e e f ñ compartilham vértices.

Ex:

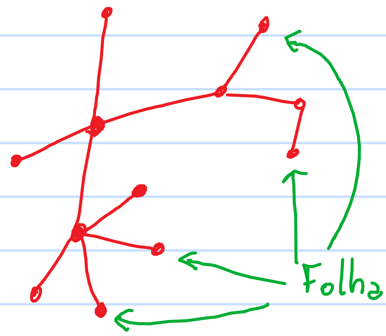


$M = \{ab, cf, de\}$

Um grafo é <u>acíclico</u> se ñ contém ciclos.
Um grafo é uma <u>árvore</u> se é acíclico e conexo.
Uma <u>folha</u> em uma árvore é um vértice de grau 1



Grafo acíclico



Árvore

número Extremal para árvores

→ Determinamos que $ex(n,H) \in \Omega(n^2)$ se e somente se H é ñ é bipartido

→ $ex(n,H) \in O(n^2)$ para qualquer grafo H

→ Então grafos ñ bipartidos apresentam a maior taxa de crescimento possível do número extremal.

Agora é natural perguntar-se: o quão pequeno pode ser $ex(n,H)$?

→ Se $e(H) = 1$, então $ex(n,H) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$
  ↳ $H = K_2$

→ Se $e(H) \geq 2$, então $ex(n,H) \geq \frac{n-1}{2}$

- Se $\Delta(H) \geq 2$, então
  - $P_2 \subseteq H$
  - Um emperelhamento M com $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ arestas é um grafo H-livre
  - Assim

$$ex(n,H) \geq |M| = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \geq \frac{n-1}{2}$$

- Se $\Delta(H) = 1$, então
  - H é um emparelhamento com ao menos duas arestas
  - O $K_{1,n-1}$, também chamado de estrela de $n-1$ pontas, é H-livre
  - Assim

$$ex(n,H) \geq e(K_{1,n-1}) = n-1 \geq \frac{n-1}{2}$$

∘ Isso motiva a seguinte pergunta.

Para quais grafos H existe $c > 0$ tal que $ex(n,H) \leq cn$?

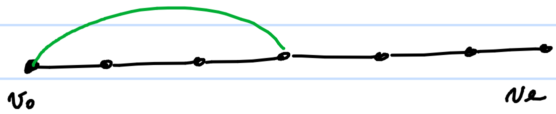
→ ñ vamos conseguir responder essa pergunta nessa aula, precisaremos desenvolver um ferramental probabilístico para isso.

→ No entanto, vamos provar que uma família grande de grafos satisfaz essa condição.

Lema. Se T é uma árvore com ao menos dois vértices, então T tem ao menos duas folhas.

Ideia da prova

- Pegue um caminho maximal P



- Vizinhança de v_0 precisa estar contida em P, senão o caminho ñ seria maximal

- Se $d(v_0) > 1$, isso representaria um ciclo, contradição

Lema 1. Seja $k \in \mathbb{N}$ e seja T uma árvore com $k+1$ vértices. Se G é um grafo com $\delta(G) \geq k$, então $T \subseteq G$.

Demonstração

A prova segue por indução em k.

BASE $k=1$

Se $k=1$, então $T = K_2$ (T é uma aresta)

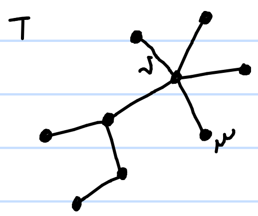
Como $\delta(G) \geq k = 1$, então G tem uma aresta

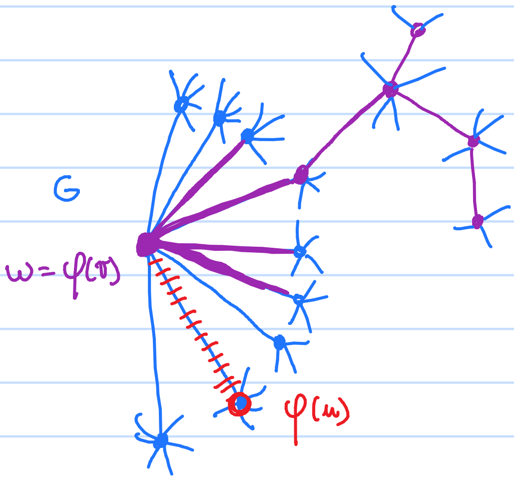
Assim $T \subseteq G$.

Passo $k \geq 2$

- Assim, $v(T) = k+1 \geq 2+1 = 3$.
- Pelo lema anterior, T possui uma folha
- Seja $u \in V(T)$ uma folha de T e seja $T' = T - u$
- Note que T' é uma árvore com $v(T') = (k-1)+1$ vértices e que $\delta(G) \geq k > k-1$
- Por hipótese de indução, $T' \subseteq G$
- Seja $\varphi : V(T') \to V(G)$ a função que mapeia a árvore T' no grafo G
- Seja v o único vizinho de u em G e seja $w = \varphi(v)$
- Note que $d_G(w) \geq \delta(G) \geq k$ e que $d_{T'}(w) \leq k-1$, já que $v(T') = k$
- Assim, existe um vizinho z de w em G que ñ pertence à T'
- Fazendo $\varphi(u) = z$, encontramos um mapeamento de T em G, isto é, $T \subseteq G$.

$k = 8$





Lema: Todo grafo G com pelo menos uma aresta contém um subgrafo H

$$\delta(H) > \frac{e(G)}{v(G)}$$

$$\left[\frac{e(G)}{v(G)} = \frac{\sum_{u \in V(G)} d(u)}{2\, v(G)} = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\sum d(u)}{v(G)}}_{\text{grau médio}}\right]$$

Demonstração

- Para provar isso, vamos remover vértices cujos graus são menores ou iguais a $\frac{e(G)}{v(G)}$. Vamos provar que o procedimento para e o subgrafo resultante do processo ñ é vazio e todos os vértices desse subgrafo possuem grau $> \frac{e(G)}{v(G)}$.

- Seja

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_m = H,$$

onde $G_i = G_{i-1} - v_i$, onde v_i é um vértice de grau $\leq \frac{e(G)}{v(G)}$ em G_{i-1}.

- Se $m < v(G)$, então $H \subseteq G$ tal que $d_H(u) > \frac{e(G)}{v(G)}$ para todo $u \in V(H)$, e o resultado segue.

- Agora suponha, para uma contradição, que $m = v(G)$.

Então, $H = (\emptyset, \emptyset)$ e removemos todos os vértices e arestas de G. Em particular, note que qndo removemos o vértice v_m, ñ removemos nenhuma aresta. Assim

$$e(G) = \sum_{i=1}^{v(G)-1} d_{i-1}(v_i) \leq \sum_{i=1}^{v(G)-1} \frac{e(G)}{v(G)} = (v(G)-1)\frac{e(G)}{v(G)} < e(G),$$

um absurdo. $\square$

Teorema Sejam $n, k \in \mathbb{N}$ e seja T uma árvore com $k+1$ vértices. Então

$$ex(n, T) \leq (k-1)n$$

Demo.

- Suponha para uma contradição que existe um grafo G T-livre tal que $e(G) > (k-1)n$
- Pelo resultado anterior, existe um $H \subseteq G$ tal que

$$\delta(H) > \frac{e(G)}{n} > \frac{(k-1)n}{n} = k-1$$

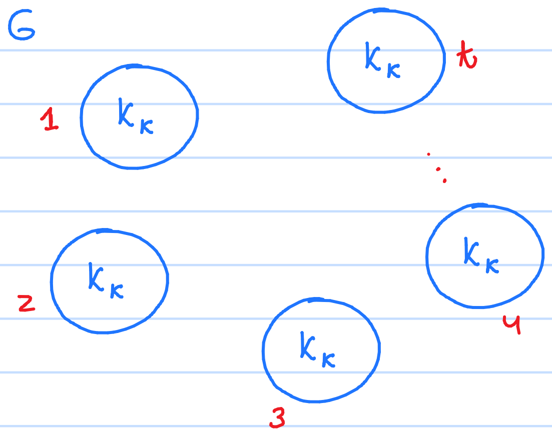
- Então $\delta(H) \geq k$
- Pelo Lema 1, $T \subseteq H \subseteq G$, o que contraria o fato de G ser T-livre $\square$

Não se espera que o limitante acima seja justo

Conjectura (Erdős-Sós, 1963) Sejam $n, k \in \mathbb{N}$, e seja T uma árvore com $k+1$ vértices. Então

$$ex(n, T) \leq \frac{(k-1)n}{2}$$

→ se verdadeiro tal resultado seria justo para toda árvore



$n = tk$

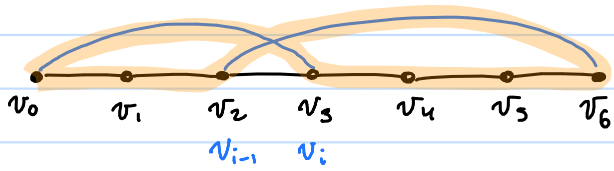
- G é T-livre $\quad v(T) = k+1$
- $e(G) = \binom{k}{2} \cdot t = \binom{k}{2}\frac{n}{k} = \frac{(k-1)k}{2} \cdot \frac{n}{k}$

$$= \frac{(k-1)n}{2}$$

Lema 3. Todo grafo conexo com n vértices contém um caminho de comprimento $k = \min\{2\delta(G), n-1\}$.

Demonstração

- Seja $P = (v_0, \dots, v_\ell)$ um caminho de comprimento máximo em G e note que $N(v_0), N(v_\ell) \subseteq V(P)$.
- Afirmamos que se $\ell < k \leq 2\delta(G)$, então existe um ciclo C em G que tem os mesmos vértices de P.
- Para isso, basta mostrar que existe uma aresta $v_{i-1}v_i \in E(P)$ tal que $v_0 v_i, v_\ell v_{i-1} \in E(G)$.



- Suponha, para uma contradição, que tal aresta ñ existe.
- Então, note que se $v_0 v_i \in E(G)$, então $v_\ell v_{i-1} \notin E(G)$.
- Assim,

$$\ell - d(v_0) \geq d(v_\ell).$$

- Logo

$$\ell \geq d(v_\ell) + d(v_0) \geq 2\delta(G) \geq k > \ell,$$

uma contradição.

- Assim, concluímos que existe um ciclo C com os mesmos vértices de P.
- Se C tem todos os vértices, então P tem $n-1$ arestas e o resultado segue
- Se existe um vértice de G que ñ está em C, então, como G é conexo, existe um que não está e é adjacente a um vértice de C. Com esse vértice e C, podemos formar um caminho maior que P, um absurdo $\square$.

Teo. Sejam $n, k \in \mathbb{N}$. Então $ex(n, P_k) \leq \frac{(k-1)n}{2}$.

Demonstração

- A prova segue por indução em n.

Base $n \leq k$

- Então $ex(n, P_k) \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \leq \frac{n(k-1)}{2}$.

Passo $n \geq k+1$

- Seja G um grafo P_k-livre tal que $e(G) = ex(n, k)$
- Suponha que G ñ é conexo e sejam $G_1, G_2, \dots, G_\ell$ as componentes de G.
- Seja $n_i = v(G_i)$ para todo $i = 1, \dots, \ell$
- Por H.I. $ex(n_i, P_k) \leq \frac{(k-1)n_i}{2}$
- Note que

$$ex(n, P_k) = e(G) = \sum_{i=1}^{n} e(G_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{(k-1)n_i}{2} = \frac{(k-1)}{2} \sum_{i=1}^{n} n_i = \frac{(k-1)n}{2},$$

e o resultado segue.

- Portanto, podemos supor que G é conexo.
- Seja $t = \min\{2\delta(G), n-1\}$
- Como $n \geq k+1$, temos que $k \leq n-1$.
- Suponha que $\delta(G) \geq k/2$
- Assim, $k \leq 2\delta(G)$
- Como $k \leq n-1$ e $k \leq 2\delta(G)$, temos que

$$t = \min\{2\delta(G), n-1\} \geq k$$

- Pelo Lema 3, $P_t \subseteq G$
- Assim $P_k \subseteq P_t \subseteq G$, e o resultado segue.
- Então, podemos assumir que $\delta(G) < k/2$ e seja $u \in V(G)$ t.q. $d(u) < k/2$
- Seja $G' = G - u$ e note que G' é P_k-livre
- Por H.I.

$$e(G') \leq ex(n-1, P_k) \leq \frac{(n-1)(k-1)}{2}$$

$d(u) \leq \frac{k-1}{2}$

Assim

$$ex(n, P_k) = e(G) = e(G') + d_G(u) \leq \frac{(n-1)(k-1)}{2} + \frac{(k-1)}{2} = \frac{n(k-1)}{2}$$

$\square$